ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA - ABIDJAN	ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE PIERRE NDIAYE ENSAE - DAKAR	INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

   On fait le changement de variable $t = \ln x$, $dt = dx/x$ et il vient :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x}dx &= \int_0^{\ln 2} \cos t dt \\ &= [\sin t]_0^{\ln 2} \\ &= \sin(\ln 2).\end{aligned}$$

2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x\sin x - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$. On a

$$f(x) = \frac{\sin x - 1/\sqrt{x}}{x - 1/x}.$$

   Quand x tend vers $+\infty$, le numérateur reste borné et le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Donner le comportement au voisinage de $x = 1$ de la même fonction.

   Quand x tend vers 1, le numérateur de la fonction tend vers $\sin 1 - 1 < 0$, et le dénominateur tend vers 0 par valeurs inférieures ou supérieures selon que x est plus petit ou plus grand que 1.

   Par suite, la limite à gauche de f en 1 est $+\infty$, et sa limite à droite est $-\infty$.

4. Écrire le nombre complexe $z = 2 - 2i$ sous forme trigonométrique.

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

5. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \tan(x/2)\cos(2x),$$

   expliquez quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

   La fonction $x \mapsto \tan(x/2)$ est impaire, périodique de période 2π et n'est pas définie au points multiples impairs de π. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est paire et de période π. La fonction f est donc impaire et de période 2π, avec le même ensemble de définition que $x \mapsto \tan(x/2)$. Par suite on étudie cette fonction sur l'intervalle $[0, \pi[$, on fait ensuite la symétrie par rapport à l'origine sur l'intervalle $]-\pi, 0]$ et on reproduit la courbe obtenue par translation périodique à tout l'ensemble de définition.

6. Dériver la fonction définie à la question précédente.

   En combinant les formules de dérivation d'un produit et de dérivation des fonctions composées, il vient :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(x/2))\cos(2x) - 2\tan(x/2)\sin(2x).$$

7. Dans un jeu opposant les joueurs A et B, on lance un dé équilibré. Si le dé tombe sur 5 ou 6, B réalise un score égal au résultat du lancer. Si le dé tombe sur 1, 2, 3 ou 4, A réalise un score égal à k fois le résultat du lancer. Quelle doit être la valeur de k pour que le score soit équitable, c'est-à-dire pour que la différence entre les scores soit d'espérance nulle ?

   Le joueur A fait un score égal à 5 avec probabilité $1/6$, un score égal à 6 avec probabilité $1/6$, et un score égal à 0 avec probabilité $4/6$. L'espérance de son score est donc égale à $0 \times 4/6 + 5/6 + 6/6 = 11/6$.

   Le joueur B fait un score égal à k, $2k$, $3k$ ou $4k$ avec probabilité $1/6$, et un score égal à 0 avec probabilité $2/6$. L'espérance de son score est donc égale à $0 \times 2/6 + k/6 + 2k/6 + 3k/6 + 4k/6 = 10k/6$.

   Le jeu est équitable si les deux espérances de gain sont égales, soit si $k = 11/10$.

8. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_0^2 + \cdots + u_n^2}$ pour $n \geq 0$. Cette suite est-elle croissante ? Est-elle convergente ?

$u_{n+1}^2 = u_0^2 + \cdots + u_n^2$, donc $u_{n+1}^2 > u_n^2$, et comme tous les termes de la suite sont évidemment positifs, $u_{n+1} > u_n$ et la suite est croissante. Par ailleurs, pour $n \geq 1$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 > u_0^2$ et cette différence ne tend donc pas vers 0 quand $n \to +\infty$: la suite (u_n^2) n'est donc pas convergente, elle tend vers l'infini, et il en est donc de même de la suite (u_n).

9. On considère la suite définie par $u_0 = 1/4$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1/4$ pour $n \geq 0$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

   A l'évidence, on a $u_n > 0$ pour tout entier n. La fonction $f(x) = x^2 + 1/4$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$, donc la suite (u_n) est monotone. Comme $u_1 > 1/4 = u_0$, elle est croissante.

   Si la suite converge ce sera vers une solution de l'équation $f(l) = l$, soit $l^2 + 1/4 = l$. La seule racine positive de cette équation est $l = 1/2$, et comme $u_0 < 1/2$, la croissance de f implique par une récurrence immédiate que $u_n < 1/2$ pour tout n. La suite est donc croissante, majorée par $1/2$, donc elle converge et sa limite est la seule possible, c'est-à-dire $1/2$.

10. Résoudre l'equation $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

    $x_1 = 1$ est solution évidente de cette équation, et on peut donc factoriser l'expression de l'énoncé par $x - 1$.

    Un calcul immédiat montre que $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0 = (x-1)(x^2 + 5x + 1)$. Il reste donc à calculer les solutions de l'équation $x^2 + 5x + 1 = 0$. Le discriminant de cet équation du deuxième degré est égal à $25 - 4 = 21$, les solutions cherchées sont donc $(x_2 = -5 - \sqrt{21})/2$ et $(x_3 = -5 + \sqrt{21})/2$.

    Les solutions réelles de l'équation donnée par l'énoncé sont donc x_1, x_2 et x_3, et ce sont aussi ses solutions complexes.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Dans cet exercice, on se donne un nombre réel a, et on considère l'application

$$f_a(x) = \exp(x^a \ln x)$$

1. Donner le domaine de définition de f_a, et calculer sa dérivée.

   $f_a(x)$ est définie pour tout $x > 0$ et dérivable sur l'ensemble de son domaine de définition. Si $a \neq 0$, sa dérivée vaut

$$f_a'(x) = \left(ax^{a-1} \ln x + x^{a-1}\right) \exp(x^a \ln x) = x^{a-1} \left(a \ln x + 1\right) \exp(x^a \ln x).$$

   Si $a = 0$, $f_0(x) = x$ donc $f_0'(x) = 1$.

2. Montrer que toutes les courbes représentatives de f_a, $a \in \mathbf{R}$, ont un point commun, que l'on déterminera.

   Pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f_a(1) = \exp(0) = 1$. Donc toutes les courbes passent par le point de coordonnées $(1, 1)$.

3. Étudier la branche infinie de f_a en $+\infty$ selon les valeurs de a.

   — si $a \geq 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^a \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$; de plus, si $a > 0$, $f_a(x)/x = \exp((x^a - 1) \ln x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp((x^a - 1) \ln x) = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)/x = +\infty$ et la courbe représentative de f_a admet une branche parabolique d'axe $y'y$ en $+\infty$; enfin, $f_0(x) = x$ et donc la courbe représentative de f_0 est confondue avec son asymptote d'équation $y = x$;

— si $a < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^a \ln x = 0$ par croissance comparée des fonctions puissance et logarithme, donc $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 1$; dans ce cas, la courbe représentative de f_a admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

4. Discuter, selon les valeurs de a, de la limite de f_a à droite de 0.

— si $a > 0$, $\lim_{x\to0^+} x^a \ln x = 0$ par croissance comparée des fonctions puissance et logarithme, donc $\lim_{x\to0^+} f_a(x) = 1$;
— si $a \leq 0$, $\lim_{x\to0^+} x^a \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x\to0^+} f_a(x) = 0$.

5. Discuter, selon les valeurs de a, de la limite de f'_a à droite de 0.

— si $a > 1$, $\lim_{x\to0^+} x^{a-1}(a\ln x + 1)\exp(x^a \ln x) = 0$ par croissance comparée des fonctions puissance et logarithme, donc $\lim_{x\to0^+} f'_a(x) = 0$;
— si $a = 1$, $f'_1(x) = (\ln x + 1)\exp(x \ln x)$; le premier terme de ce produit tend vers $-\infty$ et le second vers 1 quand x tend vers 0 par la droite ; donc $\lim_{x\to0^+} f'_1(x) = -\infty$.
— si $0 < a < 1$, $\lim_{x\to0^+} x^{a-1}(a\ln x + 1)\exp(x^a \ln x) = -\infty$ comme produit de trois fonctions tendant respectivement vers $= \infty$, $-\infty$ et 1, donc $\lim_{x\to0^+} f'_a(x) = -\infty$;
— si $a = 0$, $f'_0(x) = 1$ en tout point, donc également par limite à droite de 0 ;
— si $a < 0$, par croissance comparée des fonctions puissance et exponentielle (ou en passant aux logarithmes, en mettant $\ln x$ en facteur et en faisant tendre x vers 0 à droite) il vient que $\lim_{x\to0^+} f'_a(x) = 0$.

6. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

On sait déjà que $f_a(1) = 1$ pour tout réel a, et un calcul rapide montre qu'on a également $f'_a(1) = 1$ pour tout réel a : par suite, l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est, pour tout a, $y = x$.

7. Dresser les tableaux de variations de f_a correspondant à tous les cas que vous avez distingués aux questions précédentes. On précisera notamment les valeurs des maximums et minimums locaux de f_a

$f'_a(x)$ est, pour tout $x > 0$, du signe de $(a\ln x + 1)$. Si $a > 0$, on a donc $f'_a(x) < 0$ ssi $x < \exp(-1/a)$ et $f'_a(x) > 0$ ssi $x > \exp(-1/a)$: f_a est donc successivement décroissante puis croissante et atteint son minimum en un point x_a compris entre 0 et 1. Si $a < 0$, c'est le contraire qui se produit : f_a est successivement croissante puis décroissante, et atteint son maximum en un point x_a supérieur à 1.

Dans tous les cas, $x = \exp(-1/a)$ correspond à un extremum local dont la valeur est $f_a(\exp(-1/a)) = \exp(-1/ae)$.

Les tableaux de variations se déduisent alors des considérations précédentes.

8. Représenter graphiquement sur une même figure les courbes représentatives correspondant à ces tableaux de variations. On précisera notamment les pentes des courbes au point d'abscisse 0.

Les courbes se déduisent sans peine des informations contenues dans les tableaux correspondants.

9. Calculer $f_{-0,1}(10^{10})$ et commenter le résultat obtenu au vu des résultats précédents.

$$
\begin{aligned}
f_{-0,1}(10^{10}) &= \exp\left(\left(10^{10}\right)^{-0.1}\ln\left(10^{10}\right)\right)\\
&= \exp\left(10^{-1}\times 10\ln 10\right)\\
&= \exp(\ln 10)\\
&= 10.
\end{aligned}
$$

On a vu plus haut que comme $-0.1<0$, $\lim_{x\to+\infty} f_{-0.1}(x)=1$. Le calcul ci-dessus montre que la convergence vers l'asymptote est lente, d'autant que la fonction décroit depuis l'instant $x=\exp(10)$...

Exercice 3

1. On considère l'application f qui à tout nombre réel x associe $f(x)=x^3-2x-1/2$.
   (a) Calculer $f(-1)$, $f(-1/2)$, $f(0)$ et $f(1)$.

   On trouve par un calcul immédiat : $f(-1)=1/2$, $f(-1/2)=3/8$, $f(0)=-1/2$ et $f(1)=-3/2$.

   (b) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f.

   $f'(x)=3x^2-2$. f' s'annule donc aux points $x=-\sqrt{2/3}$ et $x=\sqrt{2/3}$. Par suite, f est croissante entre $-\infty$ et $-\sqrt{2/3}$ ainsi qu'entre $\sqrt{2/3}$ et $+\infty$, et décroissante entre $-\sqrt{2/3}$ et $\sqrt{2/3}$. On en déduit le tableau de variations de f.

   (c) Déduire de ce qui précède que l'équation $f(x)=0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport à -1, $-1/2$, 0 et 1.

   On a $f(1)<0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; par ailleurs, $\sqrt{2/3}<1$ donc f est strictement croissante sur $[1,+\infty]$. Comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule une unique fois sur cet intervalle.
   De même, $-\sqrt{2/3}<-1/2<0<\sqrt{2/3}$ donc f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1/2,0]$. Comme $f(-1/2)>0$ et $f(0)<0$, le même argument montre que f s'annule une unique fois sur cet intervalle.
   De ce qui précède, on tire également que $f(-\sqrt{2/3})>f(-1/2)>0$. Comme par ailleurs $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, on déduit de la croissance et de la continuité de f entre $-\infty$ et $-\sqrt{2/3}$ que f s'annule une unique fois sur cet intervalle. Enfin, $f(-1)>0$ montre que cette dernière solution est inférieure à -1.
   En résumé, f s'annule donc 3 fois : une fois en un point x_1 situé à gauche de -1, une fois en un point x_2 situé entre $-1/2$ et 0, et une fois en un point x_3 situé à droite de 1.

   (d) Tracer la courbe représentative de f.

   Elle se déduit aisément de ce qui précède.

2. On considère désormais la fonction de la variable réelle

$$g : x \mapsto \frac{\tan x}{1+2\cos x}.$$

(a) Donner le domaine de définition de g.

$g(x)$ est bien définie si $\tan x$ est bien définie et $1+2\cos x \neq 0$. La première condition est satisfaite ssi $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; la deuxième est satisfaite ssi $\cos x \neq -1/2$, c'est-à dire que $x \neq -2\pi/3 + 2k\pi$ et $x \neq 4\pi/3 + 2k\pi$, toujours avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit le domaine de définition de g.

(b) Étudier la parité et la périodicité de g ; en déduire l'intervalle sur lequel vous allez étudier cette fonction.

Il est clair que si x est dans le domaine de définition de g, c'est aussi le cas de $-x$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{\tan(-x)}{1+2\cos(-x)} \\ &= \frac{-\tan x}{1+2\cos x} \end{aligned}$$

et il s'ensuit que la fonction g est impaire. De plus, g est clairement périodique de période 2π. On étudiera donc g sur l'intervalle $[0,\pi]$ privé des points $\pi/2$ et $2\pi/3$ où elle n'est pas définie.

(c) Étudier les branches infinies de g.

Sur l'intervalle considéré, il suffit de regarder les limites à droite et à gauche en $\pi/2$ et en $2\pi/3$. Il vient facilement que $\lim_{x\to\pi/2^-} = +\infty$; $\lim_{x\to\pi/2^+} = -\infty$; $\lim_{x\to 2\pi/3^-} = -\infty$; et $\lim_{x\to 2\pi/3^+} = +\infty$: on a donc deux asymptotes verticales d'équations $x = \pi/2$ et $x = 2\pi/3$ sur notre intervalle d'étude.

(d) Calculer la dérivée de g, et exprimer $g'(x)$ en fonction de $\cos x$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{1+2\cos x}{\cos^2 x} + 2\tan x \sin x}{(1+2\cos x)^2} \\ &= \frac{1+2\cos x + 2\sin^2 x\cos x}{\cos^2 x(1+2\cos x)^2} \\ &= \frac{1+2\cos x + 2(1-cos^2 x)\cos x}{\cos^2 x(1+2\cos x)^2} \\ &= \frac{-2\cos^3 x + 4\cos x + 1}{\cos^2 x(1+2\cos x)^2}. \end{aligned}$$

(e) En vous aidant des résultats de la question 1, montrer que g' s'annule une unique fois sur l'intervalle d'étude, en un point x_0 situé entre $\pi/2$ et $2\pi/3$.

D'après l'expression précédente, le signe de g' est donc celui de $-2\cos^3 x + 4\cos x + 1 = -2f(\cos x)$.

Quand x parcourt l'intervalle d'étude $[0,\pi]$, $\cos x$ décroît continûment de 1 à -1. Une nouvelle application du théorème des valeurs intermédiaires dit qu'il passe une unique fois par x_2, qui est la seule valeur annulant $f(x)$ entre -1 et 1. Plus précisément, l'étude faite à la question 1 montre que cette valeur est comprise entre $-1/2$ et 0, et pour avoir $-1/2 \leq \cos x \leq 0$ avec $x \in [0,\pi]$, il faut avoir $\pi/2 \leq x \leq 2\pi/3$, ce qui achève la démonstration.

(f) Dresser le tableau de variations de g.

Il résulte de la question précédente que $g'(x) > 0$ ssi $f(\cos x) < 0$ ce qui implique que $\cos x \geq \cos x_0$ et finalement, étant donné la décroissance de cos sur $[0, \pi]$, que $x \leq x_0$, x_0 désignant le point de $[0, \pi]$ tel que $\cos x_0 = x_2$

(g) Donner l'allure de la courbe représentative de g.

Elle se déduit des questions précédentes sans oublier de compléter par symétrie par rapport à l'origine (g est impaire), puis par translations horizontales de vecteur $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n}dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+x}dx = \ln 3 - \ln 2.$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2x}dx = \frac{1}{2}\ln 3.$$

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

Si $0 \leq x \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $x^n \geq x^{n+1}$ donc $1+x+x^n \geq 1+x+x^{n+1}$ donc $\dfrac{1}{1+x+x^n} \leq \dfrac{1}{1+x+x^{n+1}}$ et finalement $I_n \leq I_{n+1}$. La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est donc croissante.

3. Montrer que pour tout n,

$$I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx.$$

Ce résultat provient immédiatement du fait que si $0 \leq x \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $x^n \geq 0$ donc $\dfrac{1}{1+x+x^n} \leq \dfrac{1}{1+x}$.

4. Conclure quant à la convergence de I_n.

On a donc

$$I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2.$$

La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est donc croissante et majorée par $\ln 2$, donc convergente.

5. Montrer que

$$\ln 2 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx.$$

$$\begin{aligned} \ln 2 - I_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)(1+x+x^n)}dx. \end{aligned}$$

6. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx = 0$$
et en déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

Pour tout $x\in[0,1]$, $(1+x+x^n)(1+x)\geq 1$ donc $0\leq \dfrac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}\leq x^n$ et finalement
$$0\leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$
Le théorème dit "des gendarmes" permet alors de conclure au résultat demandé, d'où on déduit immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \ln 2$.

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1}$ pour tout $n\geq 0$.

1. (a) Montrer que $\sqrt{n}\leq u_n\leq \sqrt{2n}$ pour tout entier $n\geq 1$.

   Il est clair que, pour tout entier n, $u_n > 0$ et donc $u_{n+1} = \sqrt{n+1}$ d'où la première inégalité.
   On montre la deuxième inégalité par récurrence : $u_1 = \sqrt{2}$ permet d'initialiser, et si $u_n\leq\sqrt{2n}$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n+n+1}\leq\sqrt{\sqrt{2n}+n+1}$.
   Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $2n\leq n^2+2n+1 = (n+1)^2$. En passant à la racine carrée, il vient $\sqrt{2n}\leq n+1$ ce qui, reporté dans l'équation de récurrence, montre que $u_{n+1}\leq\sqrt{2(n+1)}$, ce qui conclut la démonstration.

   (b) En déduire que
   $$\frac{u_n}{\sqrt{n}}\leq\sqrt{1+\frac{\sqrt{2n-2}}{n}}$$
   et donner la limite de $u_n/\sqrt{n}$ quand $n\to\infty$.

   $$\begin{aligned}\frac{u_n}{\sqrt{n}} &\leq \frac{\sqrt{u_{n-1}+n}}{\sqrt{n}}\\ &\leq \sqrt{\frac{\sqrt{2n-2}}{n}+1}.\end{aligned}$$
   Le membre de droite de cette inégalité converge vers 1, et comme on sait que $u_n\geq\sqrt{n}$, on conclut que $\lim_{n\to+\infty} u_n/\sqrt{n} = 1$.

2. (a) Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n-1}}{n}.$$
   $$\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{n-1}}{n}.$$
   La première fraction de cette expression tend vers 1 d'après la question précédente, tandis que la deuxième tend vers 0. Par suite,
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n-1}}{n} = 0.$$

(b) Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

On peut soit multiplier numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du numérateur (c'est-à-dire $\sqrt{1+x}+1$) pour lever l'indétermination, soit reconnaître la dérivée au point 0 de l'application $x \mapsto \sqrt{1+x}$: les deux méthodes amènent directement au résultat demandé.

(c) Déduire des questions précédentes la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1}{\frac{u_{n-1}}{n}}.$$

Il suffit en effet de coupler les résultats des deux questions précédentes pour trouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}-1}{\frac{u_{n-1}}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

3. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} u_n - \sqrt{n} &= \sqrt{u_{n-1}+n} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left[\sqrt{\frac{u_{n-1}}{n}+1}-1\right] \\ &= \sqrt{n}\frac{u_{n-1}}{n}\frac{\left[\sqrt{\frac{u_{n-1}}{n}+1}-1\right]}{\frac{u_{n-1}}{n}} \\ &= \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}\frac{\left[\sqrt{\frac{u_{n-1}}{n}+1}-1\right]}{\frac{u_{n-1}}{n}}. \end{aligned}$$

Le second terme de ce produit tend vers $1/2$ d'après la question 2c ; quant au premier terme, il vaut

$$\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

et tend donc vers 1 d'après la question 1b : cela conclut la démonstration.

Exercice 6

On considère l'ensemble $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module égal à 1. Soit a un nombre complexe a tel que $|a| \neq 1$.

1. Montrer que l'application f_a donnée par

$$f_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

est bien définie pour tout élément z de $\mathbf{U}$.

$f_a(z)$ est bien définie ssi $1+\bar{a}z \neq 0$, c'est-à-dire $\bar{a}z \neq -1$. Mais comme $z \in \mathbf{U}$, $|\bar{a}z| = |\bar{a}| = |a| \neq 1$ par hypothèse. Comme $|-1| = 1$, on ne peut donc pas avoir $\bar{a}z = -1$, et $f_a(z)$ est bien définie pour tout élément z de $\mathbf{U}$.

2. Montrer que, si $z \in \mathbf{U}$, alors $\bar{z} = 1/z$.

   Si, $z \in \mathbf{U}$ z s'écrit sous forme trigonométrique $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et donc $\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$. En multipliant et divisant par la quantité conjuguée, on trouve que

$$\bar{z} = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{z}.$$

3. En déduire que si $z \in \mathbf{U}$, alors $f_a(z) \in \mathbf{U}$.

   Si $z \in \mathbf{U}$, alors

$$\begin{aligned} f_a(z) &= \frac{z+a}{z\left(\frac{1}{z}+\bar{a}\right)} \\ &= \frac{z+a}{z\left(\bar{z}+\bar{a}\right)} \\ &= \frac{z+a}{z\left(\overline{z+a}\right)}. \end{aligned}$$

   Comme $|z| = 1$ et $|\overline{z+a}| = |z+a|$, le module d'un produit étant le produit des modules, on en conclut que $|f_a(z)| = 1$ d'où le résultat demandé.

4. Réciproquement, montrer que tout élément t de $\mathbf{U}$ est l'image par f_a d'un unique élément z de $\mathbf{U}$ que l'on déterminera.

$$\begin{aligned} t = f_a(z) &\Leftrightarrow t = \frac{z+a}{1+\bar{a}z} \\ &\Leftrightarrow t + \bar{a}zt = z + a \\ &\Leftrightarrow z(1-\bar{a}t) = t - a \\ &\Leftrightarrow z = \frac{t-a}{1-\bar{a}t}. \end{aligned}$$

   Notons que comme $|-a| \neq 1$, le dénominateur de cette dernière expression n'est pas égal à 0 comme nous l'avons vu à la question 1. Par suite on a bien déterminé l'unique nombre complexe z tel que $f_a(z) = t$. Par ailleurs, $z = f_{-a}(t)$, et comme $t \in \mathbf{U}$, on déduit de la question 3 que $z \in U$, ce qui achève le raisonnement.

5. Déduire de ce qui précède que f_a est une bijection de $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{U}$ et préciser sa bijection réciproque.

   Nous venons de montrer que pour tous z et t dans $\mathbf{U}$, $t = f_a(z)$ ssi $z = f_{-a}(t)$, ce qui prouve que f_a est une bijection de $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{U}$ dont la bijection réciproque est f_{-a}.

6. Donner l'ensemble des points z dont l'image par f_a appartient à l'ensemble $\{-1, 1, i, -i\}$ dans chacun des cas suivants :

(a) $a = 2$;

D'après ce qui précède, il suffit de calculer les images par f_{-2} des points considérés, et on trouve respectivement les valeurs de z égales à -1, 1, $(-4-3i)/5$ et $(-4+3i)/5$.

(b) $a = 2i$;

De même, en calculant les images par f_{-2i} des points considérés, on trouve respectivement les valeurs de z égales à $(3-4i)/5$, $(-3-4i)/5$, i et $-i$.

(c) $a = 1+i$.

Le même procédé donne les résultats $(-3-4i)/5$, -1, $-i$ et $(-4-3i)/5$.

Exercice 7

On joue suivant la règle suivante : on est en possession d'un pion initialement placé au point 0 sur une règle graduée ; à chaque lancer du dé, on avance de 3 cases si le résultat est un multiple de 3, et on recule de 2 cases dans le cas contraire. Le joueur ou la joueuse gagne si, au bout de 5 lancers, le pion est sur une case positive ou nulle.

1. Soit X_k la variable aléatoire égale à 3 si le résultat du $k-$ième lancer est un multiple de 3, et à -2 sinon. Donner la loi de X_k.

   X_k est égal à 3 si le dé tombe sur 3 ou 6. La loi de X_k est donc donnée par $P(X_k = 3) = 2/6 = 1/3$ et $P(X_k = -2) = 1 - P(X_k = 3) = 2/3$.

2. Pour tout entier k, on pose $Y_k = (X_k + 2)/5$. Donner la loi de Y_k ainsi que la loi de la variable
$$S = \sum_{k=0}^{5} Y_k.$$

   Si $X_k = -2$, $Y_k = 0$; si $X_k = 3$, $Y_k = 1$. Y_k est donc une variable de loi de Bernoulli de paramètre $1/3$, qui vaut 1 quand le $k-$ième lancer fait avancer le pion (on appellera cette situation un succès).

   On en déduit que S, qui représente le nombre de succès en 5 lancers indépendants, est de loi binomiale de paramètres $(5, 1/3)$.

3. En déduire la probabilité de gagner à ce jeu.

   La position du pion au bout de 5 lancers est égale à $\sum_{k=1}^{5} X_k$. On a $X_k = 5Y_k - 2$, donc $\sum_{k=1}^{5} X_k = 5S - 10 = 5(S-2)$.

   On en déduit qu'on a gagné si et seulement si $S \geq 2$. Or
$$\begin{aligned} P(S \geq 2) &= 1 - P(S=0) - P(S=1) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\simeq 0,54 \end{aligned}$$

4. Pouvez-vous étendre votre raisonnement :

   (a) au cas où on avance de 3 cases si le résultat est 6, et on recule de 2 cases dans le cas contraire ?

(b) au cas où on gagne si le pion est sur une case positive après 10 lancers ?

Donner la probabilité de gain dans chacune de ces situations.

Pour le cas (a), On fait exactement le même raisonnement, si ce n'est que S est de loi binomiale de paramètres $(5, 1/6)$. On trouve alors une probabilité de gain égale à $0, 20$. Pour le cas (b), S est de loi binomiale de paramètres $(10, 1/6)$ et un calcul analogue au précédent montre que l'on gagne si $S \geq 4$. Après calculs, on trouve que la probabilité de gagner est égale à $0, 44$.

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application f définie sur R par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
Cette hyperbole admet les droites y=1 et x=0 comme asymptotes. La fonction et décroissante.

2. Le graphe de f admet-il un centre de symétrie ?
Le point de coordonnées (0, 1) est un centre de symétrie (fonction impaire dans le changement de repère).

3. Calculer $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 f(x)\, dx$.
On a : $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} [x + Ln\, x]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} (1 - \epsilon - Ln\, \epsilon) = +\infty$.

4.Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $u_0 > 0$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f\ (u_n)$.
On vérifie aisément par récurrence que la suite est toujours à termes strictement positifs.
Si la suite converge, elle converge vers un point fixe *l* de la fonction, à savoir : $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Comme la fonction est décroissante, la suite n'est pas monotone, donc on étudie la suite des termes de rang pair et celle de rang impair.
Si $u_0 > l$, on vérifie que l'on a : $u_{2n} > l$ et que la suite est décroissante, donc elle converge vers *l*. Raisonnement analogue avec la suite des termes de rang impair, les deux suites sont adjacentes et la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers *l*.
Raisonnement du même ordre si $u_0 < l$ (dans le cas où $u_0 = l$, la suite est stationnaire).

Exercice n° 2

On considère l'application f définie sur R par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-ax}}$, où a est un paramètre réel strictement positif.

1. Etudier les variations et la convexité de *f*.
La dérivée est égale à : $f'(x) = \frac{a\, e^{-ax}}{(1+e^{-ax})(1+e^{-ax})} > 0$, la fonction est donc croissante avec deux asymptotes horizontales en 0 et 1.
La fonction est convexe sur les réels négatifs et concave sur les réels positifs.

2. Montrer que *f* admet un centre de symétrie (que l'on précisera).
Le point A(0, ½) est un centre de symétrie. On vérifie avec le changement de variables X=x et Y=y-1/2 que la fonction est impaire.

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f\,(x) = x$.
Résoudre cette équation est équivalent à : $x + x\, e^{-ax} - 1 = 0$
On étudie la fonction $z = x + x\, e^{-ax} - 1$ pour *x*>0.
Avec le tableau des variations, la fonction *z* est croissante de -1 à plus l'infini. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution comprise entre zéro et 1.

4. Calculer $I(a) = \int_0^1 f(x)dx$
On effectue le changement de variable : $u = \ e^{ax}$ pour obtenir

$$I(a) = \frac{1}{a}[Ln\ (1+u)]_1^{e^a} = \frac{1}{a} Ln\ (\frac{1+e^a}{2})$$

Exercice n° 3

Soit $f :]0,+\infty[\to R$ définie par : $f(t) = \frac{Ln t}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 1$ (où Ln désigne le logarithme népérien).

Soit $F :]0,+\infty[\to R$ définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\, dt$

1. Etudier la continuité de *f* sur $]0,+\infty[$

Le seul problème est au point 1.
$\lim\limits_{t\to 1} f(t) = \lim\limits_{t\to 1} \frac{Ln t}{t-1} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{Ln(1+u)}{u} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{u}{u} = 1 = f(1)$, donc *f* est continue sur $]0,+\infty[$

2. Déterminer le signe de *f* et celui de *F* sur $]0,+\infty[$.

Si $t > 1$, $t-1 > 0$ et $Ln t > 0$, donc la fonction *f* est positive et
Si $0 < t < 1$, $t-1 < 0$ et $Ln t < 0$, donc la fonction *f* est encore positive.
Comme $x > 0$ et *f* positive, *F* est positive.

3. Montrer que *F* est dérivable et calculer sa dérivée.

F est dérivable comme composée de fonctions dérivables et pour *x* différent de 1 :
$F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = 2x.\frac{Ln(x^2)}{x^2-1} - \frac{Lnx}{x-1} = \frac{(3x-1)Lnx}{x^2-1}$, et
$F'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2-x)f(c(x))}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} x.f(c(x)) = 1$, car *f* est continue.

4. La fonction dérivée F' est-elle continue ?

La question ne se pose qu'en *x*=1. On a :
$\lim\limits_{x\to 1} F'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(3x-1)Ln\, x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{Ln\, x}{(x-1)} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{Ln\,(1+u)}{u} = 1 = F'(1)$, la fonction est donc continue.

5. Etudier les variations de F sur $]0,+\infty[$.

Pour $0 < x < 1/3$, $3x - 1 < 0$, $Lnx < 0$ et $x - 1 < 0$, donc F est décroissante.
Pour $1/3 < x < 1$,$3x - 1 > 0$, $Lnx < 0$ et $x - 1 < 0$, donc F est croissante.
Pour $x > 1$, $3x - 1 > 0$, $Lnx > 0$ et $x - 1 > 0$, donc F est croissante.

Exercice n° 4

1. Dans une tombola de 100 billets, deux sont gagnants. Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à ½ d'obtenir au moins un billet gagnant ?
Soit n le nombre de billets et p_n la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant.
On a : $p_n = 1 - \frac{C_{98}^n}{C_{100}^n} = 1 - \frac{(100-n)(99-n)}{100\times 99}$.
L'inéquation : $p_n \geq 1/2$ revient à résoudre : $n^2 - 199\, n + (50 \times 99) \leq 0$ et on obtient 29 billets.

2. Dans une autre tombola composée également de 100 billets, sachant que le prix d'un billet est de 1 euro et qu'un billet gagnant rapporte 20 euros, combien faut-il de billets gagnants dans cette loterie pour que l'espérance de gain des joueurs soit la plus proche de zéro.
L'espérance est égale à : $E(X) = (-1)(100 - p) + 20\, p = 0$, où p est le nombre de billets gagnants. Il faut 5 billets.

3. Dans une troisième tombola contenant 1000 billets, il y a 3 billets gagnants qui rapportent chacun 50 euros et 20 autres billets gagnants qui rapportent chacun 20 euros. Les autres billets sont perdants.
Sachant que le prix d'achat d'un billet est toujours d'un euro, calculer l'espérance de gain pour cette tombola.

On a : $E\,(X) = (-1)\ \frac{977}{1000} + \frac{3\times 50}{1000} + \frac{20\times 20}{1000}\ = -0{,}427$

Exercice n° 5

Les trois questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans R l'équation : $Ln\,(x^2 - 1) - Ln\,(2x - 1) + Ln\,2 = 0$.
L'équation est définie pour x>1 et équivalente à : $\frac{x^2-1}{2x-1} = \frac{1}{2}$
On obtient : $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2. Résoudre dans R^2, le système : $\begin{cases} x + y + 1 = -4 \\ (x+2)(y-1) = -45 \end{cases}$
Le système s'écrit aussi : $\begin{cases} (x+2) + (y-1) = -4 \\ (x+2)(y-1) = -45 \end{cases}$
En posant X=x+2 et Y=y-1, il s'agit de trouver deux nombres connaissant la somme et le produit.
On obtient -9 et 5. Par conséquent on a deux solutions : (x=-11, y=6) et (x=3, y=-8).

3. Résoudre dans R l'inéquation : $(m-3)x^2 - 2\,m\,x + 12 \geq 0$, où m est un paramètre réel.
On obtient les résultats suivants :
- Si m=3, alors $S =]-\infty, 2]$
- Si m=6, alors $S = R$
- Si m<3, alors $S = \left[\frac{6}{m-3}, 2\right]$
- Si 3<m<6, alors $S =]-\infty, 2] \cup \left[\frac{6}{m-3}, +\infty\right[$
- Si m>6, alors $S = \left]-\infty, \frac{6}{m-3}\right] \cup [2, +\infty[$

Exercice n° 6

On cherche à déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t) f(t)\,dt$$

Supposons que f soit une solution de cette équation, alors

$f(x) = -1 - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt$ et en particulier $f(0) = -1$.

Le terme de droite de l'équation précédente étant dérivable, f est dérivable.

Et $f'(x) = -\int_0^x f(t)\,dt - xf(x) + xf(x)$, soit $f'(x) + \int_0^x f(t)\,dt = 0$.

Posons $y(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, on obtient l'équation différentielle : $y''(x) + y(x) = 0$.

La solution générale est $y(x) = A\cos x + B\sin x$ et avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$, $y(x) = -\sin x$ et $f(x) = -\cos x$

On vérifie aisément que $f(x) = -\cos x$ est solution de l'équation proposée.