ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Conquérir l'espace, est-ce bien raisonnable ?

Sujet n° 2

Hommages et commémorations vous semblent-elles des cérémonies toujours nécessaires ?

Rendre hommage à quelqu'un : Témoigner son respect, son admiration, sa reconnaissance envers quelqu'un.
Commémorer : Rappeler par une cérémonie le souvenir d'une personne ou d'un événement.

Sujet n° 3

« Il faut cultiver notre jardin. » Telle est la conclusion du conte philosophique, *Candide*, de Voltaire, écrivain français du XVIIIème siècle.

Le refus du monde extérieur est-il une caractéristique de nos sociétés aujourd'hui ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée de deux exercices et un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1 :

1) Soit a et b deux entiers naturels tels que a < b. On suppose que a divise b.
Montrer que a divise b – a. Quel est le quotient de (b – a) par a ?

2) En déduire les entiers naturels n tels que n – 1 divise n + 3 ?

Exercice 2 :

1) On considère la fonction réelle f de la variable réelle strictement positive x définie par :

$$f : x \in \mathbb{R}^{+*} \to f(x) = \sqrt{x(x+2)}$$

Étudier précisément ses variations (domaine de définition, calcul et signe des dérivées première et seconde, branches infinies, tangentes aux points remarquables, etc …) et tracer son graphe dans un repère orthonormé classique.

2) On considère la fonction réelle g de la variable réelle strictement positive x définie par :

$$g : x \in \mathbb{R}^{+*} \to g(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$$

Étudier ses variations.

Problème : variations autour de l'exponentielle

Introduction : rappels et préliminaires

a) Le symbole exponentiel e désigne la base des logarithmes naturels (ou népériens), dont le symbole est Ln ; e est défini par Ln e = 1 ; $e \approx 2{,}718$; $e^{1/2} \approx 1{,}65$; $e^{-1/2} \approx 0{,}61$.

b) On rappelle que la dérivée f ' d'une fonction réelle f est la limite, si elle est finie, quand ε tend vers 0, du rapport [f(x+ε) – f(x)]/x :

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{x}$$

c) On rappelle que, quand u → 0, on a les équivalences suivantes :

$\text{Ln}(1 + u) \approx u$

$e^u \approx 1 + u$

$(1 + u)^\alpha \approx 1 + \alpha.u$

d) On donne les valeurs des intégrales A, B et M suivantes :

$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\ dx = \sqrt{2\pi}$

$B = \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} e^{-x^2/2}\ dx = 0{,}8426\sqrt{2\pi} \approx 2{,}1$

$M = \int_0^1 e^{-x^2/2} dx \approx 0{,}855$

Partie A

Soit f_a la fonction définie sur l'espace des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f_a : x \in \mathbb{R} \to f_a(x) = e^{ax^2}$$

où a est un paramètre réel.

1) Étudier le cas a = 0.

2) Quelle est la valeur de l'expression $f_a(x).f_{-a}(x)$?

3) Exprimer f_{-a}', dérivée première de f_{-a}, en fonction de f_a et f_a'.

4) Étudier les limites éventuelles de $f_a(x)/x$ quand x tend vers + ∞ et - ∞.

5) Étudier les fonctions f_1 et f_{-1} associées respectivement aux valeurs 1 et -1 du paramètre a.

6) Étudier la fonction f_a (variations, limites, forme du graphe, …).
Donner l'équation de la tangente à la courbe représentant f_a au point d'abscisse x = 1.

7) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$.

Partie B

On définit la fonction g_a sur l'intervalle [0, 2] par :

- pour $0 \le x < 1$: $g_a(x) = e^{ax^2}$
- pour $1 \le x \le 2$: $g_a(x) = a$

où a est un paramètre réel.

8) Étudier les cas particuliers $a = 0$, $a = 1$ et $a = -1$.

9) Existe-t-il des valeurs de a telles que g_a soit continue au point $x = 1$?

10) On définit la fonction G(a) par : $G(a) = \int_0^2 g_a(x)\,dx$
a) Expliciter G(a).
b) Quel est le domaine de définition de G ?
c) Calculer G(0) et G(-1).

11) On considère maintenant $a \geq 0$.
a) Déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour G.
b) En utilisant la définition de la dérivée rappelée en introduction, donner l'expression de G'(a).
c) En déduire le tableau de variations de G.

12) Dans cette question, on prend $a \geq 1$.
L'équation $G(a) = 4a$ a-t-elle des solutions ? (Indication : on pourra étudier les variations de $N(a) = G(a) - 4a$)

Partie C

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
- pour $0 \leq x \leq 1$: $h(x) = 1$
- pour $x > 1$: $h(x) = 1 - e^{-(x-1)^2/2}$

Soit l'intégrale $H(x) = \int_0^x h(t)dt$.

13) La fonction h est-elle continue ? Dérivable ?
Donner son tableau de variation et la forme de son graphe.
Quelle est l'équation de la tangente au point $x = 2$ à la courbe représentant h ?

14) Étudier la continuité et la dérivabilité de H.

15) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentant H au point d'abscisse $x = 2$.

16) Étudier la limite de $H(x)/x$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Existe-t-il une asymptote pour H lorsque $x \to +\infty$?

17) Combien l'équation $H(x) = x - 1$ a-t-elle de solutions dans l'intervalle [0, 2] ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

Après avoir décrit de manière théorique les avantages et les inconvénients des politiques protectionnistes mises en place dans de nombreux pays ou Unions régionales, vous analyserez les pratiques protectionnistes de certains pays ou Unions de l'Afrique.

Sujet 2

Inégalités économiques, sociales et territoriales : Après avoir décrit les facteurs déterminants et les principales dynamiques au plan mondial, vous analyserez la situation dans un ou deux pays.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de six énoncés indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
On appelle « différence de A et B », notée A – B, le sous-ensemble de E formé par les éléments de A qui n'appartiennent pas à B.
1) Exprimer A – B à l'aide des opérateurs $\cap$ (intersection) et ^{c} (complémentaire).

2) On prend pour E l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ; A est le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par les multiples de 5, B est le sous-ensemble des entiers pairs.
Donner la forme générale des éléments de A – B.

Exercice 2 :

Soit un ensemble E ; sur E x E, on définit une relation binaire notée Δ.
On rappelle les propriétés possibles pour Δ :
- Réflexivité (R) : $\forall\, x \in E,\ x\ \Delta\ x$
- Antisymétrie (A) : $\forall\, x$ et $y \in E$, $x\ \Delta\ y$ et $y\ \Delta\ x \Rightarrow x = y$
- Symétrie (S) : $\forall\, x$ et $y \in E$, $x\ \Delta\ y \Rightarrow y\ \Delta\ x$
- Transitivité (T) : $\forall\, x, y$ et $z \in E$, $[x\ \Delta\ y$ et $y\ \Delta\ z] \Rightarrow x\ \Delta\ z$

On prend $E = \mathbb{R}^+$ et on définit la relation Δ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par :
$$(x, y)\ \Delta\ (x', y') \Leftrightarrow xy \leq x'y'$$
1) Quelles sont les propriétés de la relation Δ ?

2) On définit la relation H par :
$$(x, y)\ H\ (x', y') \Leftrightarrow (x, y)\ \Delta\ (x', y') \text{ et } (x', y')\ \Delta\ (x, y)$$

2a) Donner la définition d'une relation d'équivalence.
2b) Montrer que H est une relation d'équivalence.

3) Application économique : un consommateur i veut utiliser la totalité d'un budget B consacré aux loisirs en consommant deux quantités x et y de deux loisirs X et Y (par exemple, sport et cinéma). Les prix unitaires de ces deux loisirs sont respectivement notés p_X et p_Y.
La fonction $f(x, y) = xy$ s'appelle la fonction de satisfaction du consommateur i.
3a) Que signifie le fait que (x, y) H (x', y') ?
A quelle courbe appartiennent les quantités consommées x et y à satisfaction égale notée s ?

3b) Exprimer la relation liant B, x, y, p_X et p_Y.

3c) Mettre $f(x, y)$ sous la forme d'une fonction $S(x)$.

3d) Déterminer la valeur x^* de x maximisant S. Que vaut alors y^* ?

Exercice 3 :

Soit f l'application de l'ensemble E dans l'ensemble F définie par :

$$f : x \in E \rightarrow f(x) = 2\,|x|$$

1) Étudier si f est une injection, une surjection, une bijection, dans chacun des quatre cas suivants :
a) $E = F = \mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels
b) $E = F = \mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs
c) $E = F = \mathbb{R}$
d) $E = \mathbb{R}^-$, $F = \mathbb{R}^+$

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$g(x) = e^x \text{ pour } x \leq 0$$
$$g(x) = \sqrt{x+1} \text{ pour } x > 0$$

2a) Étudier la continuité et la dérivabilité de g au point $x = 0$.
2b) Déterminer l'application h telle que :

$$(h \circ g)(x) = 2\,|x|$$

(La notation o désigne la composition de h et g : $(h \circ g)(x) = h[g(x)]$)

Exercice 4 :

On définit l'application linéaire f_a de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, a étant un paramètre réel, par :

$$f_a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (2-a)x + (a-1)y \\ 2(1-a)x + (2a-1)y \\ az \end{pmatrix}$$

1) Donner la matrice M(a) représentant f_a.

2) Trouver les noyaux K(0) de f_0 et K(1) de f_1.

3) Dans la suite de l'énoncé, on prendra $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Quel est le noyau K(a) de f_a ?

4) Montrer que M(a) peut s'écrire sous la forme A + aB où A et B sont deux matrices à déterminer.

5) Calculer AB, BA, A^2, B^2 ; donner l'expression de $M(a)^2$ en fonction de A, B et a.

6) Calculer $[M(a)]^n$ en fonction de a, où n est un entier naturel.

Exercice 5 :

Soit un ensemble E de n éléments, $n \in \mathbb{N}$; on appelle combinaison d'ordre p ($0 \leq p \leq n$) tout sous-ensemble de E comportant p éléments.
Le nombre total de combinaisons d'ordre p est égal à $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

1) Calculer $B = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p$

2) Montrer que $C_n^p = f(n, p). C_{n-1}^{p-1}$ où f(n, p) est une fonction de n et p à expliciter.

3) Calculer $S = \sum_{p=0}^{p=n} p. C_n^p$

Exercice 6 :

On considère les deux fonctions f_n et g_n, définies sur $\mathbb{R}$, par :
$f_n(x) = (1 + x)^n$
$g_n(x) = (1 - x)^n$
où n est un entier naturel.

1) Par un calcul direct, donner les expressions de leurs primitives, notées respectivement $F_n(x)$ et $G_n(x)$.

2) En développant f_n et g_n par la formule du binôme, donner deux autres expressions de $F_n(x)$ et $G_n(x)$.

3) Calculer les quantités $F_n(1) - F_n(0)$ et $G_n(1) - G_n(0)$.
En déduire la valeur de A et B où :
$A = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1} C_n^k$
$B = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k+1} C_n^k$