ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Pour tout nombre réel α, on désigne par E_α le sous-espace vectoriel des fonctions f de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continues et vérifiant

$$t \mapsto f(t)e^{-\alpha t} \text{ est bornée sur } [0,+\infty[.$$

On note par F_α l'espace défini par

$$F_\alpha = \bigcap_{\beta>\alpha} E_\beta.$$

On note de plus par C_α^∞ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $]\alpha,+\infty[$. Pour une telle fonction f, on notera $f^{(p)}$, pour $p \in \mathbb{N}$, sa dérivée p-ième avec la convention $f^{(0)} = f$.

On définit la transformée de Laplace comme étant l'application L qui à tout élément $f \in F_\alpha$ fait correspondre la fonction $L[f]$ définie sur $]\alpha,+\infty[$ par

$$L[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

Partie 1

1. Montrer que $\alpha < \delta \Rightarrow E_\alpha \subset E_\delta$.
   Soit $f \in E_\alpha$, alors $|f(t)e^{-\delta t}| = |f(t)e^{-\alpha t}| \times |e^{(-\delta+\alpha)t}| \leq |f(t)e^{-\alpha t}|$ car $-\delta+\alpha < 0$ et $t \geq 0$. Ce majorant est uniformément borné pour $t \geq 0$ car $f \in E_\alpha$ et par suite $f \in E_\delta$.

2. En déduire que $E_\alpha \subset F_\alpha$.
   Soit $f \in E_\alpha$. D'après la question 1, $f \in E_\beta$ pour tout $\beta > \alpha$, donc $f \in \bigcap_{\beta>\alpha} E_\beta = F_\alpha$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in E_\alpha$ et $s > \alpha$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ est absolument convergente.
   $|e^{-st} f(t)| = |f(t)e^{-\alpha t}| \times |e^{(\alpha-s)t}|$. Le premier terme est borné car $f \in E_\alpha$ et le second terme est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $\alpha - s < 0$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifier que l'application L est bien définie sur F_α, c'est à dire que pour tout $f \in F_\alpha$, $L[f](s)$ est fini pour tout $s > \alpha$.
   Soit $f \in F_\alpha$ et $s > \alpha$, alors $|e^{-st} f(t)| = |e^{-t(s+\alpha)/2} f(t)| \times |e^{t(\alpha-s)/2}|$. Comme $f \in \bigcap_{\beta>\alpha} E_\beta$ et $(s+\alpha)/2 > \alpha$, on en déduit que $f \in E_{(s+\alpha)/2}$, et donc le premier terme dans la décomposition précédente est absolument intégrable sur $[0, +\infty[$, d'après la question précédente. Le second terme est quant à lui borné car $\alpha < s$ et $t \geq 0$. Donc $t \mapsto e^{-st} f(t)$ est absolument intégrable sur $[0, +\infty[$ et L est bien défini sur F_α.

5. Vérifier que pour $f \in F_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est dans F_α.
   Il faut montrer que pour tout $\beta > \alpha$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)e^{-\beta t}$ est bornée sur $[0, +\infty[$. On a $|t^n f(t)e^{-\beta t}| = |t^n e^{t(\alpha-\beta)/2}| \times |f(t)e^{-t(\beta+\alpha)/2}|$. Le premier terme est uniformément borné car $\alpha < \beta$ (fonction continue sur $[0, +\infty[$ qui tend vers 0 à l'infini par croissance comparée). Le second est borné car $f \in E_{(\beta+\alpha)/2}$, ce qui est une conséquence de $(\beta + \alpha)/2 > \alpha$ et $f \in F_\alpha = \bigcap_{\beta>\alpha} E_\beta$.

Partie 2

L'objectif de cette partie est d'obtenir l'expression de la dérivée de la transformée de Laplace, ainsi que de la transformée de Laplace d'une dérivée, et de même pour les dérivées successives.

6. Soit $s > \alpha$ et $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite quelconque dans $]\alpha, +\infty[$ qui converge vers s. Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on introduit la suite de fonctions $(\Delta_{p,n}(s,t))_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $]\alpha, +\infty[\times[0, +\infty[$ par
$$\Delta_{p,n}(s,t) = \frac{(-t)^p e^{-st} f(t) - (-t)^p e^{-s_n t} f(t)}{s - s_n}.$$
   Montrer que pour tout $s > \alpha$,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \Delta_{p,n}(s,t)dt = \int_0^{+\infty} (-t)^{p+1} e^{-st} f(t)dt.$$
   Il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée. On remarque que pour tout $t > 0$, la fonction $s \mapsto (-t)^p e^{-st} f(t)$ est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ de dérivée $(-t)^{p+1} e^{-st} f(t)$. Cela implique que $\Delta_{p,n}(s,t)$ converge simplement vers $(-t)^{p+1} e^{-st} f(t)$ lorsque $n \to \infty$. Cherchons à présent à majorer $\Delta_{p,n}(s,t)$. D'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $s_0(n)$ entre s et s_n tel que $\Delta_{p,n}(s,t) = (-t)^{p+1} e^{-s_0(n)t} f(t)$. Par ailleurs, puisque (s_n) converge

vers $s > \alpha$ et est à valeurs dans $]\alpha, +\infty[$, on a $\inf_n s_n > \alpha$. En notant $a = \min(s, \inf_n s_n)$, on a donc $s_0(n) \geq a > \alpha$. Ainsi

$$|\Delta_{p,n}(s,t)| \leq |e^{-at}t^{p+1}f(t)|.$$

D'après la question 5, $t \mapsto t^{p+1}f(t)$ est dans F_α car $f \in F_\alpha$ et d'après la question 4, cela implique que la transformée de Laplace de cette fonction calculée en $a > \alpha$ est finie, autrement dit que le majorant précédent est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure au résultat demandé.

7. En déduire que L est une application de F_α dans C^∞_α et que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(L[f])^{(p)} = (-1)^p L[t^p f(t)],$$

où l'on note abusivement $t^p f(t)$ la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ définie sur $[0, +\infty[$.

Nous montrons le résultat par récurrence, l'hypothèse au rang $p \in \mathbb{N}$ étant que L est p fois dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ avec $(L[f])^{(p)} = (-1)^p L[t^p f(t)]$.

Pour $p = 0$ le résultat est évident. Supposons à présent que l'hypothèse soit vraie au rang p. Alors, en utilisant les mêmes notations qu'à la question précédente,

$$\frac{(L[f])^{(p)}(s) - (L[f])^{(p)}(s_n)}{s - s_n} = \int_0^{+\infty} \Delta_{p,n}(s,t)dt.$$

Lorsque $n \to +\infty$, cette quantité converge vers $\int_0^{+\infty}(-t)^{p+1}e^{-st}f(t)dt = (-1)^{p+1}L[t^{p+1}f(t)]$ d'après la question précédente, ce qui montre la dérivabilité de $(L[f])^{(p)}$ en s avec

$$(L[f])^{(p+1)}(s) = (-1)^{p+1}L[t^{p+1}f(t)](s).$$

Nous venons de montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $L[f]$ est p fois dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ avec $(L[f])^{(p)} = (-1)^p L[t^p f(t)]$. Cela implique qu'elle est p fois continument dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ (chaque dérivée étant dérivable donc continue), autrement dit $L[f] \in C^\infty_\alpha$: L est bien une application de F_α dans C^∞_α

8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et φ_k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi_k(t) = t^k e^{at}$.
   a) Préciser le plus petit α pour lequel $\varphi_0 \in F_\alpha$ et déterminer $L[\varphi_0]$.
   Pour tout $\beta > a$, $e^{-\beta t}\varphi_0(t) = e^{-(\beta - a)t} \leq 1$ donc $\varphi_0 \in E_\beta$. Ceci montre que $\varphi_0 \in F_a$. Montrons que $\varphi_0 \in F_\alpha$ avec $\alpha < a$ est impossible. Cette hypothèse impliquerait $\varphi_0 \in E_{(a+\alpha)/2}$, or $e^{-(a+\alpha)t/2}\varphi_0(t) = e^{(a-\alpha)t/2}$ n'est pas une fonction bornée (elle diverge vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$) : il y a une contradiction. Ainsi $\alpha = a$ est le plus petit α pour lequel $\varphi_0 \in F_\alpha$. On calcule aisément $L[\varphi_0](s) = 1/(s-a)$, pour tout $s > a$.
   b) En déduire, pour tout $k \geq 0$, le plus petit α pour lequel $\varphi_k \in F_\alpha$ et déterminer $L[\varphi_k]$.
   D'après la question 5, $\varphi_k \in F_a$ car $\varphi_0 \in F_a$. On ne peut pas avoir $\varphi_k \in F_\alpha$ si $\alpha < a$ pour les mêmes raisons que dans la question précédente. Donc $\alpha = a$ est le plus petit α pour lequel $\varphi_k \in F_\alpha$. Pour le calcul on utilise la question 7 : $L[\varphi_k] = (-1)^k(L[\varphi_0])^{(k)} = k!/(s-a)^{k+1}$.

9. Soit f une fonction continument dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $f \in F_\alpha$ et $f' \in F_\alpha$. Montrer que pour tout $s > \alpha$

$$L[f'](s) = sL[f](s) - f(0).$$

On obtient la relation par une simple intégration par parties, soit directement sur l'intégrale impropre, soit en tronquant la borne supérieure à n puis en faisant tendre n vers l'infini : pour tout $s > \alpha$,

$$L[f'](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = \Big[e^{-st} f(t)\Big]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = 0 - f(0) + sL[f](s)$$

en utilisant le fait que $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$ puisque cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$.

10. Soit f une fonction p fois continument dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $f^{(k)} \in F_\alpha$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, p$. Donner l'expression de $L[f^{(p)}]$ en généralisant l'égalité précédente.
On vérifie par une récurrence immédiate que $L[f^{(p)}](s) = s^p L[f](s) - \sum_{k=0}^{p-1} s^{p-1-k} f^{(k)}(0)$.

Partie 3

On s'intéresse dans cette partie à l'application de la transformée de Laplace pour la résolution d'équations différentielles.

On considère dans un premier temps l'équation différentielle

$$y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = e^t \quad \text{avec} \quad y''(0) = y'(0) = y(0) = 1. \tag{1}$$

On admet que la solution y de (1) sur $\mathbb{R}$ est unique. On cherche à déterminer cette solution.

11. On cherche la solution y de (1) parmi les fonctions appartenant à F_1 et dont les dérivées successives appartiennent également à F_1.

   a) Justifier que sous cette hypothèse on peut appliquer L à chaque terme de l'équation (1) et préciser à quel ensemble l'image obtenue appartiendra.
   Par hypothèse, toutes les dérivées successives de y sont dans F_1. Ce dernier est un espace vectoriel en tant qu'intersection d'espaces vectoriels, donc le membre de gauche dans (1) est dans F_1. De même le terme de droite $t \mapsto e^t$ est dans F_1 (question 8 ou vérification immédiate). On peut donc appliquer L à chaque terme de (1) en tant qu'application définie sur F_1 et l'image par L appartient à C_1^∞ (question 7).

   b) Déterminer l'expression de $L[y]$.
   En utilisant les relations établies en questions 9 et 10 et le fait que $L[t \mapsto e^t](s) = 1/(s-1)$ (question 8), on obtient, pour tout $s > 1$,

$$\{s^3 L[y](s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)\} - 3\{s^2 L[y](s) - sy(0) - y'(0)\} + 3\{sL[y](s) - y(0)\} - L[y](s) = \frac{1}{s-1},$$

c'est à dire, en utilisant le fait que $y''(0) = y'(0) = y(0) = 1$,

$$\begin{aligned}(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)L[y](s) - s^2 + 2s - 1 &= \frac{1}{s-1}\\ (s-1)^3 L[y](s) - (s-1)^2 &= \frac{1}{s-1}\\ L[y](s) &= \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{(s-1)}.\end{aligned}$$

12. Donner toutes les solutions à (1) trois fois continument dérivables sur $\mathbb{R}$.
Dans l'expression de $L[y]$ précédente, on reconnait la transformée de Laplace de $t \mapsto t^3 e^t/3!$ et de $t \mapsto e^t$ obtenues en question 8. Une fonction y (de F_1) candidate pour être solution de (1) est donc
$$y(t) = \left(1 + \frac{t^3}{6}\right) e^t.$$
On vérifie aisément qu'elle est effectivement solution. Par unicité, c'est la seule parmi les fonctions trois fois continument dérivable.

On considère à présent l'équation différentielle, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$ty''(t) + (1-t)y'(t) + ny(t) = 0. \tag{2}$$

13. On s'intéresse aux solutions y de l'équation différentielle (2) appartenant à F_1 et dont les dérivées successives appartiennent également à F_1.
   a) Justifier que l'on peut appliquer L à chaque terme de l'équation (2) et préciser à quel ensemble l'image obtenue appartiendra.
   D'après la question 5, $t \mapsto ty''(t)$ ainsi que $t \mapsto (1-t)y'$ sont dans F_1 car y'' et y' le sont. On peut donc appliquer L à chaque terme de l'équation (2). L'image appartient à C_1^∞ (question 7).
   b) Montrer que $L[y]$ vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.
   On a d'une part, d'après la question 7, $L[ty''] = -(L[y''])'$ et d'autre part, d'après la relation obtenue en question 10, $L[y''](s) = s^2 L[y](s) - sy(0) - y'(0)$. En dérivant par rapport à s cette dernière expression, on obtient
   $$L[ty''](s) = -2sL[y](s) - s^2(L[y])'(s) + y(0).$$
   De façon similaire on a $L[(1-t)y'] = L[y'] + (L[y'])'$ avec $L[y'](s) = sL[y](s) - y(0)$, d'où
   $$L[(1-t)y'](s) = sL[y](s) - y(0) + L[y](s) + s(L[y])'(s).$$
   On en déduit qu'en appliquant L à (2), on obtient pour tout $s > 1$,
   $$-2sL[y](s) - s^2(L[y])'(s) + y(0) + sL[y](s) - y(0) + L[y](s) + s(L[y])'(s) + nL[y](s) = 0,$$
   soit
   $$(-s^2 + s)(L[y])'(s) - (s - n - 1)L[y](s) = 0.$$

c) Trouver des solutions sur $]1,+\infty[$ de l'équation précédente et en déduire qu'il existe un polynôme P non-nul, que l'on déterminera, tel que l'ensemble des fonctions $\{t \mapsto \lambda P(t),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont solutions de l'équation différentielle (2) sur $\mathbb{R}$.

On a $(L[y])'(s)/L[y](s) = (n+1-s)/(s^2-s) = n/(s-1)-(n+1)/s$ pour tout $s \in]1,+\infty[$, d'où $\ln(L[y](s)) = n\ln(s-1)-(n+1)\ln(s)+c$ où $c \in \mathbb{R}$, soit $L[y](s) = \lambda(s-1)^n/s^{n+1}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il s'agit à présent de trouver y tel que sa transformée de Laplace a la forme précédente. Pour cela on développe le numérateur avec la formule du binôme de Newton pour obtenir

$$L[y](s) = \lambda \frac{1}{s^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k s^{n-k} = \lambda \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k s^{-k-1}.$$

Or on sait (question 8) que $L[t^k](s) = k! s^{-k-1}$ donc on peut choisir pour y le polynôme

$$y(t) = \lambda \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} t^k, \quad t \geq 0.$$

On vérifie aisément que ces fonctions sont effectivement solutions de (2) sur $\mathbb{R}$.

14. Pourquoi l'ensemble des solutions précédentes ne contient pas toutes les solutions de (2) sur $]0,+\infty[$?

Sur $]0,+\infty[$, on peut récrire (2) sous forme résolue $y''(t)+[(1-t)/t]y'(t)+[n/t]y(t) = 0$. On sait que l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle linéaire du second ordre est un espace vectoriel de dimension 2. Or l'ensemble des solutions de la question précédente forme un sous-espace vectoriel de degré 1. Il manque donc des solutions.

15. On cherche finalement à trouver toutes les solutions de (2).

a) On suppose que y et z sont deux solutions non-colinéaires de (2) sur $]0,+\infty[$. On définit le Wronskien par $W(t) = y(t)z'(t)-z(t)y'(t)$. On suppose que $W(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$. Montrer que pour $t > 0$, $W'(t)/W(t) = (t-1)/t$ et en déduire la forme de $W(t)$.

On a $W' = yz''-zy''$ qui vaut en remplaçant z'' et y'' par leur expression issue de (2) :

$$\begin{aligned} W'(t) &= y(t)\left(\frac{t-1}{t}z'(t)-\frac{n}{t}z(t)\right)-z(t)\left(\frac{t-1}{t}y'(t)-\frac{n}{t}y(t)\right) \\ &= \frac{t-1}{t}\left(z'(t)y(t)-z(t)y'(t)\right) = \frac{t-1}{t}W(t) = \left(1-\frac{1}{t}\right)W(t). \end{aligned}$$

On en déduit que pour $t > 0$, $W(t) = \mu\, e^t/t$ pour une constante $\mu \in \mathbb{R}$.

b) On note $A(t)$ une primitive de $t \mapsto e^t/(tP^2(t))$ où P est le polynôme déterminé dans la question 13 c). Donner l'ensemble des solutions de (2) sur un intervalle de $]0,+\infty[$ ne contenant pas les racines de P.

On sait qu'une solution particulière de (2) est donnée par $y(t) = P(t)$. Supposons qu'il existe une autre solution z non-colinéaire à y telle que pour tout $t > 0$, $y(t)z'(t) -$

$z(t)y'(t) \neq 0$. Alors, d'après la question précédente, $y(t)z'(t) - z(t)y'(t) = \mu\, e^t/t$, c'est à dire

$$P(t)z'(t) - P'(t)z(t) = \mu\, e^t/t. \tag{3}$$

Résolvons cette équation du premier ordre. La solution de l'équation homogène associée est $z = z_0 P$ où $z_0 \in \mathbb{R}$. On applique la méthode de variation de la constante pour obtenir la solution de l'équation avec second membre : la fonction $z_0(t)P(t)$ est solution sur un intervalle de $]0, +\infty[$ ne contenant pas les racines de P ssi $z_0'(t) = \mu\, e^t/(tP^2(t))$ (qui est bien une écriture valide sur l'intervalle considéré). On en déduit que l'ensemble des solutions de (3) s'écrit $z(t) = P(t)(c_1 + c_2 A(t))$ où c_1 et c_2 sont des constantes réelles. On vérifie par ailleurs que ces fonctions sont solutions de (2) (on le sait déjà pour $c_2 = 0$, il suffit de le vérifier pour $c_1 = 0$). Cet ensemble de solutions étant un sous-espace vectoriel de dimension 2, il contient toutes les solutions de (2) sur l'intervalle considéré.

2 Problème d'algèbre

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On note 0 le vecteur nul de E et id_E l'endomorphisme identité de E. On note de plus $f^0 = id_E$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $f_{|F}$ la restriction de f à F. Pour rappel, on dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$K_n = Ker(f^n), \qquad I_n = Im(f^n).$$

Partie 1

1. Montrer que :
   a) la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
   $x \in K_n$ ssi $f^n(x) = 0$, d'où $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = 0$ et $x \in K_{n+1}$.

   b) la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   $y \in I_{n+1}$ ssi $\exists x \in E,\ y = f^{n+1}(x)$, d'où $y = f^n(f(x))$ et $y \in I_n$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   a) K_n est stable par f ;
   $x \in K_n$ ssi $f^n(x) = 0$, d'où $f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = 0$ et donc $f(x) \in K_n$.

   b) I_n est stable par f.
   $y \in I_n$ ssi $\exists x \in E,\ y = f^n(x)$, d'où $f(y) = f(f^n(x)) = f^n(f(x)) \in I_n$.

On pose :

$$K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n, \qquad I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

3. Vérifier que K et I sont des sous-espaces vectoriels de E.
   I sev de E en tant qu'intersection de sev de E.
   Pour K : pour tous $x_1 \in K$ et $x_2 \in K$, il existe n_1 tel que $x_1 \in K_{n_1}$ et n_2 tel que $x_2 \in K_{n_2}$. Comme la suite (K_n) est croissante, $x_1 \in K_{n_+}$ et $x_2 \in K_{n_+}$ avec $n_+ = \max(n_1, n_2)$. Puisque K_{n_+} est un espace vectoriel, on en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x_1 + x_2 \in K_{n_+} \subset K$. De plus $K \neq \emptyset$ puisque $0 \in K$.

4. Montrer que K et I sont stables par f.
   Conséquence immédiate de la question 2.

5. Etablir les équivalences
   a) f injectif $\Leftrightarrow K = \{0\}$;
   On remarque que si f est injective alors f^n est injective par une récurrence immédiate. La réciproque est évidemment vraie par croissance de (K_n).
   Ainsi f injectif $\Leftrightarrow \forall n,\ f^n$ injectif $\Leftrightarrow \forall n,\ K_n = \{0\} \Leftrightarrow K = \{0\}$.

b) f surjectif $\Leftrightarrow I = E$.

On remarque de même que si f est surjective alors f^n est surjective, la réciproque étant évidente. Ainsi f surjectif $\Leftrightarrow \forall n, f^n$ surjectif $\Leftrightarrow \forall n,\ I_n = E \Leftrightarrow I = E$.

6. Pour les exemples suivants, déterminer I, K et montrer que
   - $E = I \oplus K$;
   - $f_{|K}$ est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que $f^q_{|K} = 0$;
   - $f_{|I}$ est un automorphisme de I dans I.

   a) f est une projection, c'est à dire $f^2 = f$.

   Puisque $f^2 = f$, on en déduit par une récurrence immédiate que $f^n = f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela montre $I_n = I_1$ et $K_n = K_1$ pour tout n. Etant donné que par ailleurs $I_0 = E$ et $K_0 = \{0\}$, on en déduit que $I = I_1$ et $K = K_1$. Pour les 3 propriétés demandées :
   - $E = I_1 + K_1$ se déduit de la décomposition $x = x - f(x) + f(x)$ pour tout x dans E, où $f(x) \in I_1$, et $x - f(x) \in K_1$ (car $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = f(x) - f(x) = 0$). De plus la somme est directe, car si $y \in I_1 \cap K_1$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ (car $y \in I_1$) et puisque $y \in K_1$, $0 = f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. Donc $E = I_1 \oplus K_1$.
   - Pour $x \in K = K_1$, $f(x) = 0$ donc $f_{|K}$ est nilpotente d'ordre 1.
   - $f_{|I}$ est un morphisme d'espaces vectoriels en tant que restriction d'un morphisme. Montrons que $f_{|I}$ est bijective. $y \in I = I_1$ implique qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = f^2(x) = f(y)$, ce qui montre que $y \in f(I_1)$ et donc que $f_{|I}$ est surjective. Par ailleurs, si $y = f(x) \in I$ est tel que $f(y) = 0$, alors $0 = f(y) = f^2(x) = f(x) = y$ ce qui montre que $f_{|I}$ est injective.

   b) Pour $d \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_d[X]$ est le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d, et f est l'opérateur dérivation sur E.

   Pour $n \geq d + 1$, $f^n(P) = 0$ pour tout $P \in E$, donc $K_n = E$ et $I_n = \{0\}$. On en déduit que $K = E$ et $I = \{0\}$. Les 3 propriétés demandées sont alors évidentes.

7. Montrer que la propriété $E = I \oplus K$ est fausse si f est l'opérateur dérivation sur $E = \mathbb{R}[X]$, où $\mathbb{R}[X] = \cup_{d \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_d[X]$.

   Dans ce cas f est surjective, ce qui implique $I = E$ (question 5). De plus, $K_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $K = E$ également. I et K ne sont donc pas en somme directe.

Partie 2

Nous supposons dans la suite du problème que E est de dimension finie. Nous allons montrer que les propriétés énoncées dans la question 6 sont toujours vraies dans ce cadre.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(K_n = K_{n+1}) \Rightarrow (\forall p \in \mathbb{N},\ K_n = K_{n+p})$.

   Supposons $K_n = K_{n+1}$ et soit $x \in K_{n+2}$. Alors $0 = f^{n+2}(x) = f^{n+1}(f(x))$ et donc $f(x) \in K_{n+1} = K_n$. Cela signifie que $0 = f^n(f(x)) = f^{n+1}(x)$ et donc $x \in K_{n+1}$. Ainsi $K_{n+2} \subset K_{n+1}$ et par croissance de la suite (K_n), $K_{n+2} = K_{n+1}$. On vient de montrer $(K_n = K_{n+1}) \Rightarrow (K_{n+1} = K_{n+2})$. Une récurrence immédiate permet de conclure.

9. Soit $m = \inf\{n \in \mathbb{N},\ K_n = K_{n+1}\}$. Montrer que m est fini et que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_{m+p} = K$.
   Supposons $m = +\infty$. Cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \neq K_{n+1}$, et puisque la suite (K_n) est croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est inclus strictement dans K_{n+1}. Ceci implique que la suite $(dim(K_n))$ est une suite d'entiers strictement croissante, ce qui est impossible en dimension finie puisque $dim(K_n) \leq dim(E)$ est bornée. Donc $m < +\infty$.
   D'après la question précédente, la suite (K_n) est stationnaire à partir du rang m, donc $K = K_m = K_{m+p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $(K_n = K_{n+p}) \Leftrightarrow (I_n = I_{n+p})$.

$$\begin{array}{rrcll} & K_n & = & K_{n+p} & \\ \Leftrightarrow & dim(K_n) & = & dim(K_{n+p}) & \text{la réciproque étant vraie car } (K_n) \text{ est croissante} \\ \Leftrightarrow & dim(I_n) & = & dim(I_{n+p}) & \text{par le théorème du rang} \\ \Leftrightarrow & I_n & = & I_{n+p} & \text{le sens direct étant vrai car } (I_n) \text{ est décroissante} \end{array}$$

11. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{m+p} = I$.
    On déduit de la question précédente que $\inf\{n \in \mathbb{N},\ K_n = K_{n+1}\} = \inf\{n \in \mathbb{N},\ I_n = I_{n+1}\}$, cet infimum étant fini égal à m d'après la question 9. De plus, d'après la question précédente et la question 8, $(I_m = I_{m+1}) \Leftrightarrow (K_m = K_{m+1}) \Rightarrow (\forall p \in \mathbb{N},\ K_m = K_{m+p}) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{N},\ I_m = I_{m+p})$. La suite (I_n) est donc stationnaire à partir du rang m et $I = I_{m+p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

12. Montrer que $f_{|K}$ est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que $f^q_{|K} = 0$.
    Pour tout $x \in K$, puisque $K = K_m$, $f^m(x) = 0$ et $q = m$ convient.

13. Montrer que $f_{|I}$ est un automorphisme de I dans I.
    $f_{|I}$ est un morphisme d'espaces vectoriels en tant que restriction d'un morphisme.
    $f_{|I}$ est surjective : pour tout y de I, $y \in I_{m+1}$ car $I = I_m = I_{m+1}$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f^{m+1}(x) = f(f^m(x))$. Puisque $f^m(x) \in I_m = I$, on en déduit que $y \in f(I)$.
    $f_{|I}$ est injective : soit $y \in I$ tel que $f(y) = 0$. Puisque $I = I_m$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^m(x)$. On a donc $f(f^m(x)) = 0$ ce qui signifie $x \in K_{m+1}$. Puisque $K_{m+1} = K_m$, on obtient $f^m(x) = 0$, autrement dit $y = 0$.

14. Vérifier que pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $f^m(x) = f^{2m}(y)$.
    Pour tout $x \in E$, $f^m(x) \in I_m$, or $I_m = I_{2m}$ donc il existe $z \in I_{2m}$ tel que $z = f^m(x)$. Par ailleurs, il existe $y \in E$ tel que $z = f^{2m}(y)$ car $z \in I_{2m}$. Ainsi pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $f^m(x) = f^{2m}(y)$.

15. En déduire que $E = I \oplus K$.
    Tout élément x de E peut s'écrire $x = x - f^m(y) + f^m(y)$ pour un certain $y \in E$ vérifiant $f^m(x) = f^{2m}(y)$ (l'existence de y est assurée par la question précédente). Or $f^m(y) \in I_m = I$ et $f^m(x - f^m(y)) = f^m(x) - f^{2m}(y) = 0$ ce qui montre que $x - f^m(y) \in K_m = K$. Ainsi $E = I + K$.
    Soit à présent $z \in I \cap K = I_m \cap K_m$. Alors il existe $x \in E$ tel que $z = f^m(x)$ et de plus $f^m(z) = 0$. Cela implique $f^{2m}(x) = 0$ donc $x \in K_{2m}$. Comme $K_{2m} = K_m$, on en déduit $z = 0$. Donc $I \cap K = \{0\}$ et par suite $E = I \oplus K$.

16. Montrer la réciproque du résultat précédent, c'est à dire : si $E = F \oplus G$ avec F et G stables par f et tels que $f_{|F}$ est un automorphisme et $f_{|G}$ est nilpotente, alors nécessairement $F = I$ et $G = K$.

    Notons r un entier tel que $f^r(x) = 0$ pour tout $x \in G$ (ce r existe car $f_{|G}$ est nilpotente). Montrons que $F = I_r$ et $G = K_r$.

    $I_r \subset F$: $y \in I_r \Leftrightarrow \exists x \in E,\ y = f^r(x)$. Or $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$ car $E = F \oplus G$. Puisque $f^r(b) = 0$ par définition de r, on obtient $y = f^r(x) = f^r(a)$. Comme F est stable par f, il reste stable par f^r et donc $f^r(a) \in F$. Cela montre $y \in F$.

    $F \subset I_r$: puisque $f_{|F}$ est un automorphisme, $f(F) = F$ et par suite pour tout n, $F = f^n(F)$. Or $f^r(F) \subset I_r$ et donc $F \subset I_r$.

    $G \subset K_r$: $x \in G \Rightarrow f^r(x) = 0 \Rightarrow x \in K_r$.

    $K_r \subset G$: tout $x \in K_r$ peut s'écrire $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$. On a $f^r(x) = 0$ car $x \in K_r$ et $f^r(b) = 0$ car $b \in G$. Ainsi $f^r(a) = 0$ et donc $a \in Ker(f^r_{|F})$. Or $f^r_{|F}$ est un automorphisme de F dans F car $f_{|F}$ l'est, donc $a = 0$. Finalement $x = b \in G$.

    Puisque $F = I_r$, on remarque par stabilité de F que $I_r = F = f(F) = f(I_r) \subset I_{r+1}$, ce qui montre $I_r = I_{r+1}$ par décroissance de la suite (I_n). On est donc dans le régime stationnaire de (I_n) et $F = I_r = I$. On a montré dans la question 10 que $(I_r = I_{r+1}) \Leftrightarrow (K_r = K_{r+1})$ (on peut montrer aussi directement cette dernière égalité), ce qui montre qu'on a atteint le régime stationnaire de (K_n) et $G = K_r = K$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l***'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et Ln le logarithme népérien.***

Exercice n° 1

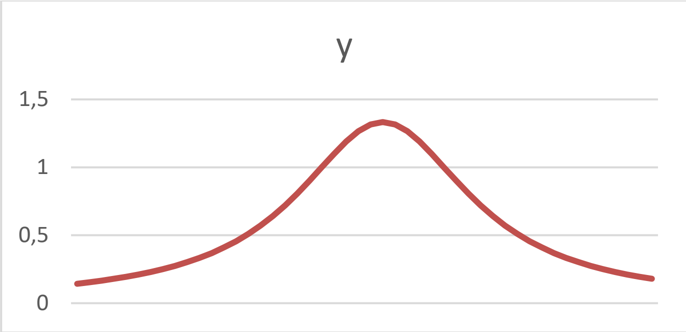
Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$

1. Donner un développement limité d'ordre 4 de f en 0.

On pose $u = x + x^2$, pour obtenir $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$ et on calcule les différentes puissances de u :
$u^2 = x^2 + 2x^3 + x^4 + o(x^4)$
$u^3 = x^3 + 3x^4 + o(x^4)$
$u^4 = x^4 + o(x^4)$
En conclusion : $\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$

2. Etudier les variations de f, ainsi que sa convexité et donner l'allure de son graphe.

La dérivée est égale à : $f'(x) = \frac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2}$. La fonction est croissante avant -1/2 et décroissante après. La fonction vaut 1 en zéro, et 4/3 en -1/2. L'axe Ox est une asymptote.
La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = 6\frac{x(x+1)}{(1+x+x^2)^3}$, la fonction est donc concave entre -1 et 0, sinon convexe.



3. La fonction f admet-elle un centre de symétrie ? un axe de symétrie ?

En examinant le graphe de la fonction, il ne peut pas y avoir de centre de symétrie, mais un axe de symétrie. On pose $X = x + 1/2$ pour obtenir : $y = \frac{1}{X^2+3/4}$, la fonction étant paire, la droite d'équation x=-1/2 est un axe de symétrie.

4. Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

On pose $X = x + 1/2$ et on obtient : $I = \int_{1/2}^{3/2} \frac{1}{X^2+3/4} dX$, puis on peut poser : $t = \frac{2}{\sqrt{3}} X$

D'où $I = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\frac{1}{t^2+1}) dt = \frac{2}{\sqrt{3}} (Arctg\, \sqrt{3} - Arctg\, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right))$.

Exercice n° 2

On considère la fonction réelle définie par : $f(x) = Ln(x^2 - 5x + 6)$.

1. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$
La fonction est définie pour x<2 ou x>3. La résolution de l'équation est équivalente à : : $(x^2 - 5x + 6) = 1$, soit : $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

2. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.
La fonction est définie pour : x<2 ou x>3. La dérivée est égale à : $f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$
La fonction est décroissante pour x<2 et croissante pour x>3. La fonction admet une branche parabolique dans la direction Ox. Les droites d'équation x=2 et x=3 sont des asymptotes verticales. Le graphe est symétrique par rapport à la droite verticale x=5/2.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$
On fait d'abord une intégration par parties pour obtenir :

$$I = [x\, Ln(x^2 - 5x + 6)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2\, x^2 - 5\, x}{x^2 - 5\, x + 6}\, dx = Ln\, 2 - J$$

On décompose la fraction rationnelle : $\frac{2\, x^2 - 5\, x}{x^2 - 5\, x + 6} = 2 + \frac{5}{2}\left(\frac{2\, x - 5}{x^2 - 5\, x + 6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2 - 5\, x + 6}\right)$, il s'ensuit que :

$I = Ln\,2 - (2 - \frac{5}{2}\,Ln\,3 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5\,x + 6}\,dx)$

Soit

$$K = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5\,x + 6}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx = 2\,Ln2 - Ln3$$

En conclusion :

$$I = Ln\,2 - \left(2 - \frac{5}{2}\,Ln\,3 + \frac{1}{2}K\right) = -2 + 3Ln3$$

Exercice n° 3

Soit la fonction réelle définie sur les réels positifs par : $f(x) = \begin{cases} x^2\,E\,\left(\frac{1}{x}\right)\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de *f* sur R^+.

- Si x >1, $E\,\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, donc *f*=0 et la fonction est continue et dérivable sur cet ensemble.
- Si $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$, $E\,\left(\frac{1}{x}\right) = k$, $f\,(x) = k\,x^2$ qui est continue et dérivable.
- Si $x = \frac{1}{k}$, $f\,(x) = \frac{1}{k}$, et $\lim_{\frac{1}{k}^+} f\,(x) = \frac{k-1}{k^2}\ \neq f(x)$, la fonction n'est pas continue et donc non dérivable.
- Si x=0, $f\,(0) = 0$. Pour $x \in]0,1[, 0 < x \leq 1 \big/ E\left(\frac{1}{x}\right)$, $et\ f(x) \leq x^2$. La fonction est continue.

2. Etudier la dérivabilité de *f* sur R^+.
La question de la dérivabilité ne se pose qu'en 0.
On a : $\lim_0 \frac{f\,(x) - f\,(0)}{x} = \lim_0 \frac{x^2\,E(\frac{1}{x})}{x} = \lim_0 \frac{n\,x^2}{x} = 1$ (car $\frac{n}{n+1} <$ nx ≤ 1) et la fonction n'est pas dérivable.

3. Calculer $I = \int_{\frac{1}{3}}^1 f(x)dx$

$I = \int_{\frac{1}{3}}^{1/2} f(x)dx + \int_{1/2}^{1} f(x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1/2} 2\,x^2\,dx + \int_{1/2}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{1/3}^{1/2} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1/2}^{1}$

$I = 2\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{81}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) = \frac{3}{8} - \frac{2}{81} = \frac{227}{648}$

Exercice n° 4

On note *E* l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels. Autres notations :

$O_n(R)$ l'ensemble des matrices orthogonales de *E*,

$D_n(R)$ l'ensemble des matrices de *E*, diagonalisables dans *R*,

$S_n(R) = \{M = (a_{i\,j}) \in E \,/\, a_{i\,j)} \geq 0\,,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} = 1\}$

1. L'ensemble est-il convexe dans *E* ?

Non, car $\pm I_n \in O_n(R)$ et $\left(\frac{1}{2}\right) I_n + (\frac{1}{2})(-I_n) = 0$ n'appartient pas à l'ensemble.

2. L'ensemble $D_n(R)$ est-il convexe dans *E* ?

Non, car les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables et la moyenne de ces deux matrices est $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, matrice de Jordan non diagonalisable.

3. L'ensemble $S_n(R)$ est-il convexe dans *E* ?

On vérifie aisément que cet ensemble est convexe.

4. Soit la matrice stochastique $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de cette matrice *M*.

Les valeurs propres sont : 0, 1 et ¼ et comme vecteurs propres associés (dans l'ordre de ces valeurs propres) : (0, 1, -1) ; (1, 1, 1) et (-2, 1, 1). On remarque que l'on a une base orthogonale.

5. Montrer que toutes les matrices stochastiques admettent une même valeur propre quel que soit *n*>1.

En additionnant toutes les colonnes sur la première colonne (par exemple), on peut mettre

$1 - \mu$ en facteur dans l'expression $\det(M - \mu\, I)$. Par conséquent 1 est une valeur propre commune à toutes les matrices stochastiques.

Exercice n° 5

On note $M_n(R)$ l'espace des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels.
On rappelle qu'une matrice $A \in M_n(R)$ est nilpotente si et seulement si $\exists\, p \in N^* / A^p = 0$ (le plus petit *p* s'appelle l'indice nilpotent).

1. Si *A* est une matrice nilpotente, montrer que $I_n - A$ est inversible et donner son inverse.

Pour $|x| < 1, \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots$, d'où

$$(I_n - A)(I_n + A + \cdots A^{p-1}) = I_n - A^p = I_n$$

La matrice $I_n - A$ est inversible et son inverse est : $(I_n + A + \cdots A^{p-1})$.

2. Soit *A* une matrice nilpotente, montrer que toutes ses valeurs propres sont nulles et déterminer son polynôme caractéristique.
La matrice admet *n* valeurs propres complexes. Soit ρ une valeur propre complexe, il existe un vecteur propre associé qui vérifie : $A\,u = \rho\,u$. On a par récurrence $A^k\,u = \rho^k u$, donc $A^p\,u = \rho^p u = 0$ et $\rho^p = 0$, donc $\rho = 0$. Par conséquent toutes les valeurs propres sont nulles.

3. Soit A est une matrice nilpotente, montrer que : $\forall\ k = 1, 2, \dots n,\ Tr(A^k) = 0$, où Tr désigne la trace.

Par hypothèse : $\exists\ p \in N^*/A^p = 0,\ \ \forall\ k = 1, 2, \dots n,\ (A^k)^p = (A^p)^k = 0$, donc la matrice (A^k) est nilpotente et donc toutes ses valeurs propres sont nulles. Par conséquent : $Tr(A^k) = 0$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, calculer $A^n, \forall\ n \geq 1$.

On vérifie aisément que cette matrice est nilpotente. $A^2 = 6\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$

5. Pour $A, B \in M_n(R)$ vérifiant AB=BA, où A est inversible et B nilpotente. Comparer $\det(A + B)$ et $\det(A)$.

On a : $AB = BA, B = A^{-1}BA, BA^{-1} = A^{-1}B$
Comme B est nilpotente, $C = A^{-1}B$ est aussi nilpotente, car $C^p = (A^{-1}B)^p = A^{-1}B^p = 0$:
Par conséquent : $\det(I + C) = (-1)^n(-1)^n = 1$
On a : $(\det(A + B) = \det A(I + A^{-1}B) = \det A\ \times \det(I + C) = \det A$

Exercice n° 6

On note $M_n(R)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Soit φ l'application définie sur $M_n(R) \times M_n(R)$ par $\varphi(A, B) = Tr\,(A^{'}B)$ où Tr désigne la trace et $A^{'}$ la transposée de la matrice A.

1. Vérifier que φ est une forme bilinéaire.
2. φ est-elle symétrique ? Définie positive ?

On a $\varphi(A, B) = Tr\,(A^{'}B) = Tr\,(A^{'}B)^{'} = Tr\,(B^{'}A) = \varphi(B, A)$, donc elle est symétrique.
L'application est bilinéaire, car la trace est linéaire.
Si $A = (a_{i\,j})$, alors $A^{'} = (a_{j\,i})$ et $A^{'}A = (c_{i\,j} = \sum_k a_{k\,i}a_{k\,j})$, d'où

$\varphi(A, A) = Tr\,(A^{'}A) = \sum_i c_{i\,i} = \sum_{i,k} a_{k\,i}^2 \geq 0$, la forme bilinéaire est donc définie positive.

3. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique de $M_2(R)$.

La base canonique est : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient :

$$\varphi(E_i, E_j) = Tr\,(E_i^{'}E_j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice de l'application est donc la matrice unité d'ordre 4.

4. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $N = B + \frac{1}{2}\, I$ (où I est la matrice unité d'ordre 4). Etudier la diagonalisation de N (on précisera ses valeurs propres).

On obtient : $N = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Comme la matrice est symétrique, elle est diagonalisable et la somme des termes de chaque ligne (et chaque colonne) est égale à 1, qui est donc une valeur propre. Par soustraction sur lignes ou colonnes, on obtient les valeurs propres suivantes : 1, ¼ (double) et ½. On vérifie que la trace est bien égale à 2.