ORGANISME INTERGOUVERNEMENTAL | UNIVERSITE DE YAOUNDE II

IFORD

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES

LAUREAT DU PRIX DES NATIONS UNIES POUR LA POPULATION 2011

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE MARS 2015

25 – 26 MARS 2015

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(Concours type A)

Durée : 4 heures
Date : 25 Mars 2015

Documents non autorisés
Utilisation des calculatrices autorisée

BAREME INDICATIF

Exercice 1 : 1,0 points
Exercice 2 : 1,05 point
Exercice 3 : 2,0 points
Exercice 4 : 3,0 point
Exercice 5 : 3,0 points
Exercice 6 : 3,5 point
Exercice 7 : 2,0 point
Exercice 8 : 2,5 points

Exercice 1. **(1 points)**

On considère la fonction $f : x \to \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$.

1) Etudier les variations de la fonction f.
2) Représenter dans un repère orthonormé les variations de la fonction f.

Exercice 2. **(1 points)**

Soit la suite de terme général u_n, n entier naturel définie par : $u_0 > 0$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}$.

1) Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n.
2) Démontrer par récurrence que : $u_n = \sqrt{2n + u_0^2}$.

Exercice 3. **(4 points)**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $f(x) = \frac{e^x}{x+10}$.

1) Démontrer que, $\forall x \subset [0\,;1], 0{,}09 \leq f'(x) \leq 0{,}225$.
2) Démontrer que l'équation f(x) = x admet dans [0 ; 1] une unique solution t.
3) Montrer que $t \in [0{,}1\,; 0{,}2]$.
4) Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par $u_0 \in [0{,}1\,;0{,}2]\ et\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer que, $(u_n)_{n\in N}$ est bien définie.
   b) Montrer que, $\forall\, n \in N$, on a : $0 \leq |u_{n+1} - t| \leq 0{,}11|u_n - t|$.
   c) En déduire que, $(u_n)_{n\in N}$ converge.

Exercice 4. **(3 points)**

On cherche à déterminer l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in N}$ telles que :

$$\forall n \in N,\ 3u_{n+2} - 7u_{n+1} + 2u_n = \frac{5}{3^n}.$$

1) Montrer qu'il existe dans E une suite $(v_n)_{n\in N}$ telle que $v_n = \beta n \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in N}$ appartient à E si, et seulement si, la suite $(u_n - v_n)_{n\in N}$ appartient à F, ensemble des suites $(w_n)_{n\in N}$ telles que : $\forall n \in N,\ 3w_{n+2} - 7w_{n+1} - 2w_n = 0$
3) Déterminer E.

Exercice 5. **(3 points)**

Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de la matrice A en utilisant :

   a. Le développement selon la 2$^{\text{ème}}$ colonne,

   b. Le développement selon la 3$^{\text{ème}}$ colonne,

   c. En plaçant des zéros sous le 2 de la dernière colonne.

2) Calculer l'inverse de la matrice A.

3) Résoudre le système d'équation : $\begin{cases} 2x + y + 2z = -4 \\ -x + 5y + 4z = 1 \\ 3x - 6y - 3z = -11 \end{cases}$.

Exercice 6. (3,5 points)

On pose : $\forall\,(p,q) \in N^* \times N^*,\ I_{p,q} = \int_0^1 t^p\,(1-t)^q\,dt.\ \forall\, p \in N,\ I_{p,0} = \int_0^1 t^p\,dt,$
$et\ \forall\, q \in N,\ I_{0,q} - \int_0^1 (1-t)^q\,dt.$

1) Montrer que, $\forall\,(p,q) \in N \times N,$

   a) $I_{p+1,q} = \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}.$

   b) $I_{p,q} - I_{p,q+1} = I_{p+1,q}.$

   c) $I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+q+2} I_{p,q}.$

2) Démontrer par récurrence sur q, p étant fixe que : $\forall\,(p,q) \in N \times N,\ I_{p,q} = \frac{q!p!}{(p+q+1)!}$

3) Calculer : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \int_0^1 t^p\,(1-t)^{n-p}dt.$

Exercice 7. (2 points)

On considère la fonction « Gamma » qui associe à tout nombre réel r positif le nombre $\Gamma(r)$ défini par l'intégrale : $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x}\,dx$.

1) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$.
2) Montrer par récurrence que pour tout nombre réel r positif, $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$.
3) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour n entier naturel positif.

Exercice 8. (2,5 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $a_n = \left[\int_0^1 \left(\sqrt{1+x^2}\right)^n dx\right]^{\frac{1}{n}}$.

1) Calculer a_2

2) Démontrer que $a_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\right).$

3) A l'aide de la fonction $x \to ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, calculer a_1.