ORGANISME INTERGOUVERNEMENTAL UNIVERSITE DE YAOUNDE II

IFORD

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES

LAUREAT DU PRIX DES NATIONS UNIES POUR LA POPULATION 2011

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE MARS 2015

25 – 26 MARS 2015

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(Concours type B)

Durée : 4 heures
Date : 25 Mars 2015

Documents non autorisés
Utilisation des calculatrices autorisée

BAREME INDICATIF

Exercice 1 : 2,0 points
Exercice 2 : 2,0 point
Exercice 3 : 2,0 points
Exercice 4 : 1,5 point
Exercice 5 : 2,5 points
Exercice 6 : 1,0 point
Exercice 7 : 1,0 point
Exercice 8 : 8,0 points

IFORD. BP 1556 – Yaoundé (CAMEROUN). E-mail: iford@iford-cm.org . Web: www.iford-cm.org
Tel.: (+237) 222 22 24 71 / 222 23 29 47 / 222 22 39 73 / 222 03 44 12 / 222 22 35 79. Fax: (+237) 222 22 67 93

Exercice 1. **(2 points)**

1) Déterminer le développement limité de $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

2) Déduire de a)
$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

Exercice 2. **(2 points)**

Soit f la fonction définie dans R^2 par $f(x,y)=x^2y^2+xy$.

1) Déterminer l'approximation quadratique de f au voisinage $X_0=(x_0,y_0)$.

2) Donner, en utilisant l'approximation affine, une valeur approximative de $f(2{,}997\,,-2{,}002)$.

3) Donner, en utilisant l'approximation quadratique, une valeur approchée de $f(2{,}997\,,-2{,}002)$.

Exercice 3. **(2 points)**

Soient deux nombres réels strictement positifs a et b distincts.

1) Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout réel t : $\frac{t(a-b)}{(t^2+a)(t^2+b)}=\frac{\alpha t}{t^2+b}+\frac{\beta t}{t^2+a}$.

2) Calculer $I=\int_0^{+\infty}\frac{t(a-b)}{(t^2+a)(t^2+b)}dt$.

Exercice 4. **(1,5 points)**

Résoudre et discuter le système d'équations suivant : $\begin{cases} ax+y+z+t=1\\ x+ay+z+t=1\\ x+y+az+t=1\\ x+y+z+at=b\end{cases}$

Exercice 5. **(2,5 points)**

A. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&11\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

1) Calculer les valeurs propres de la matrice A.

2) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3) Déterminer le vecteur propre associé à chaque valeur propre.

4) Déduire de 1) et 3) une décomposition de la matrice A.

5) Calculer $A^n=\begin{pmatrix}1&1&11\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^n$, $avec\ n\geq 1$.

Exercice 6. (1 point)

Soit $n \in N^*$. Simplifier la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+8}{k(k+2)2^k}$$

Exercice 7. (1 point)

Soit une suite de réels donnée par $a_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{n-k}$.

Montrer que pour tout entier positif n, on a $0 \leq a_n \leq 1$.

Exercice 8. (8 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

2) Etudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

3) Soit α un réel strictement positif. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^{\alpha} ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ puis $\int_1^{\alpha} f(x)dx$.

4) Soit k un entier naturel non nul. Démontrer que $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{k} - f(k)$

5) Déduire de 3) que $0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$.

6) Pour tout entier naturel non nul n on pose : $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$

   a. Simplifier S_n.

   b. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in N^*}$ est convergente.

   c. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\in N^*}$.

   d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq S_n$.

   e. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n}^{2n} f(k)\right)$.

7) On considère la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

   a. Exprimer $\sum_{k=n}^{2n} f(k)$ en fonction de u_n.

   b. Déduire de a que la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ est convergente.

   c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$.